NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for grunnskolelærerutdanning 5.-10. og bachelor i tegnspråk og tolking

Eksamensoppgave i
LGU52003 MATEMATIKK 2 (5-10), EMNE 2

Retteveiledning

Faglig kontakt under eksamen: Tore Forbregd[a], Øyvind Lundeby[b], Solomon Tesfamicael[c]
Tlf: [a] 73 41 26 37 / 92 44 62 36 , [b] 73 41 26 28 , [c] 46 44 87 86

Eksamensdato: 2. desember 2016

Eksamenstid (fra–til): 09:00–15:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Tillatte hjelpemidler er valgfri kalkulator som ikke kan kommunisere trådløst og valgfri utgave av LK06.

Annen informasjon:
Alle oppgavene skal besvares og svarene begrunnes. Den endelige karakteren vil bygge på en helhetsvurdering av besvarelsen.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 19

Antall sider vedlegg: 4

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Orginalen er:

1-sidig ☒ **2-sidig** ☐

sort/hvit ☐ **farger** ☒

skal ha flervalgskjema ☐

Kontrollert av:

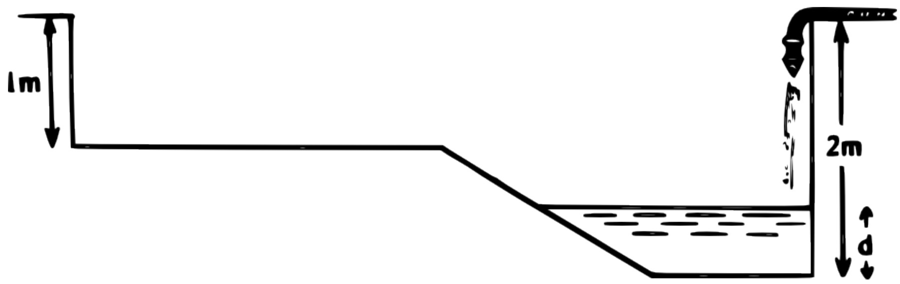
Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1

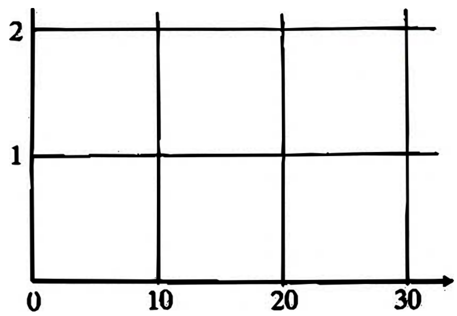
Følgende oppgave ble gitt i 9. trinn ved en skole:

Et rektangulært svømmebasseng blir fylt ved hjelp av en vannslange der vanntilførselen er konstant. Under vises et tverrsnitt av svømmebassenget



Skisser grafen som viser hvordan vanndybden (d) i den dype enden av bassenget varierer med tiden, fra tiden det tomme bassenget begynner å fylles. Anta at det tar tretti minutter å fylle bassenget til randen.

Vanndybde (d)
(meter)

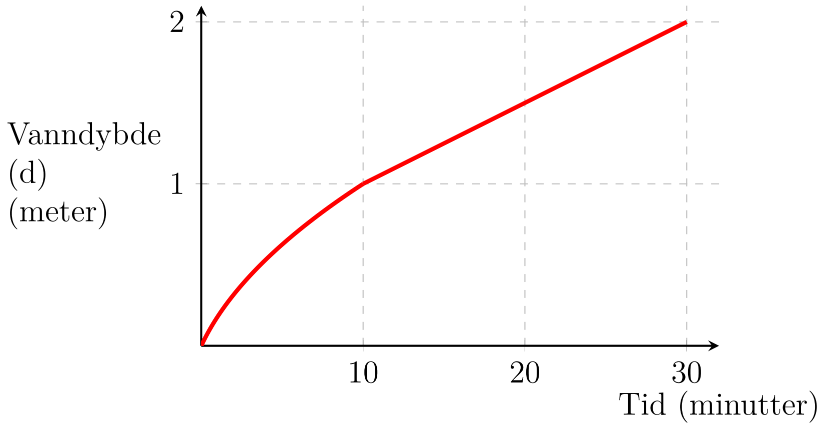


Tid (minutter)

a) Gjør oppgaven selv og gjør rede for hva hensikten av en slik oppgave kan være.

Retteveiledning

Vi merker oss at når vanndybden når 1 m så vil vanndybden øke med konstant fart (konstant stigningstall). Før vanndybden blir 1 m vil farten vanndybden øker avta (stigningstallet til grafen vil avta). Det vi vet er at det tar 30 minutter å fylle bassenget og ut i fra fassongen på tverrsnittet kan man anta at det i minste fall tar dobbelt så lang tid å fylle bassenget fra 1 metersmerket sammenliknet med tiden det tar å fylle det fram til 1 metersmerket. Vi får da en graf som følgelig ser noe slik ut:



Man kan trekke frem flere hensikter ved å gi en slik oppgave til elever. En av disse kan være å avdekke elevers forståelse av grafer og funksjoner. Et annet aspekt er funksjoners endringsrate (stigningstall).

Vedlagt finner du fem elevsvar i arbeidet med denne oppgaven (se vedlegg 1).

b) Hvilke kvaliteter vil du som lærer fremheve ved hver av elevsvarene?

Retteveiledning

Når man vurdere elevsvarene gitt i vedlegg 1 kan man ta utgangspunkt i kvaliteter:

1. Første delen av grafen er kurvet.
2. Første delen av grafen er konveks nedover (konkav).
3. Andre delen av grafen er en rett linje med positivt stigningstall.
4. Grafen starter i $(0, 0)$ og ender i $(30, 2)$.
5. Grafen har en knekk/overgang i $(t, 1)$ hvor $t \leq 5 \leq 10$.

Aslaks graf innfrir punktene 1 til 3, men ikke punktene 4 og 5 da grafen hans ikke slutter i $(30, 2)$ og overgangen skjer *etter* 1 m.

Første del av Bente sin graf er ikke konveks nedover (punktene 1 og 2), men har kvalitetene punktene 3 til 5.

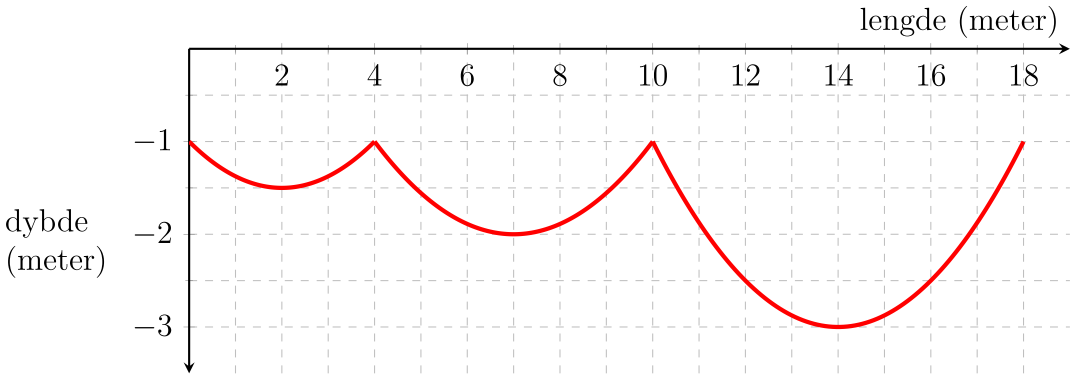
Christoffer har skissert en graf lik Bentes graf, men hans graf ender ikke i $(30, 2)$ (punkt 4).

Dinas graf innfrir punktene 4 og 5, men innfrir ikke punktene 1 til 3.

Grafen til Edgard oppfyller kun punkt 3.

Frida er lærer i klassen til elevene nevnt over. I arbeidet med oppgaven tegnet Gert, en av elevene, tverrsnittet av et rektangulært basseng (sett ovenfra) der den lengste siden var 18 m og den korte siden var 9 m. Gert var svært nysgjerrig på hvor mye et slikt basseng rommer. Han var ikke i stand til å finne ut av det.

Frida visste ikke annet råd enn å tegne tverrsnittet av bassenget i GeoGebra og fikk følgende graf og funksjonsuttrykk:



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{3}{2} & 0 \le x \le 4 \\ \frac{1}{9}(x-7)^2 - 2 & 4 \le x \le 10 \\ \frac{1}{8}(x-14)^2 - 3 & 10 \le x \le 18 \end{cases}$$

c) Gjør rede for hvordan integralregning kan brukes til å finne volumet av bassenget.

Retteveiledning

En måte en kan finne volumet av bassenget på er å multiplisere arealet til tverrsnittet (A) med bredden til bassenget (b), dvs $V = A \cdot b$. Vi kan finne A som arealet mellom den horisontale aksen og grafen. Dette finner vi som:

$$A = \left| \int_0^{18} f(x)dx \right|.$$

Grunnen til at vi trenger å ta absoluttverdien er fordi funksjonsverdiene ($f(x)$) er negative og dermed vil hele integralet evalueres til et negativt tall. Det er kun tallstørrelsen man er interessert i.

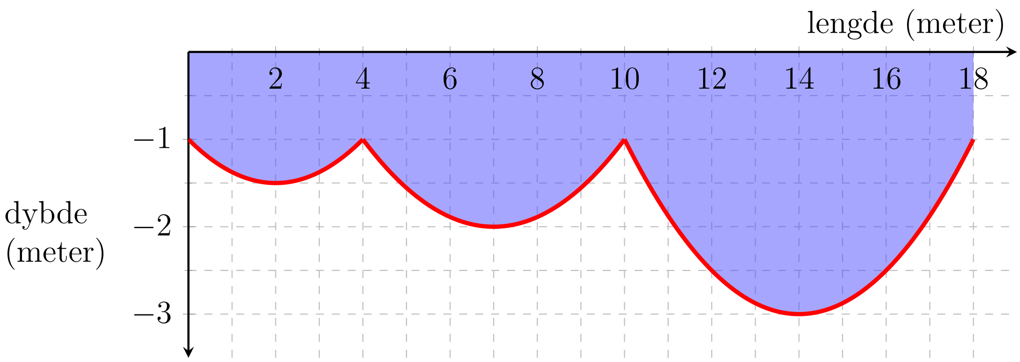
d) Bestem volumet til bassenget ved hjelp av integralregning.

Retteveiledning

Dersom vi vet arealet til tverrsnittet av bassenget, A, kan vi finne volumet til bassenget ved å multiplisere arealet med bredden til bassenget. Oppgaven opplyser om at bredden er halvparten av lengden og av grafen ser vi at lengden er 18 m. Dette betyr at

$$V = A \cdot \frac{18}{2} \tag{1}$$

Videre vet vi at arealet er gitt som arealet mellom grafen til $f(x)$ og den vannrette aksen som vist i illustrasjonen under:



Dette er gitt som integralet av $f(x)$ på intervallet $[0, 18]$, men siden $f(x)$ antar kun negative verdier i dette intervallet er vi kun interesserte i tallverdien av dette integralet:

$$\begin{aligned} A = \left|\int_0^{18} f(x)dx\right| &= \left|\int_0^4 \left(\frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{3}{2}\right) dx\right| \\ &\quad + \left|\int_4^{10} \left(\frac{1}{9}(x-7)^2 - 2\right) dx\right| + \left|\int_{10}^{18} \left(\frac{1}{8}(x-14)^2 - 3\right) dx\right| \end{aligned} \tag{2}$$

Vi regner ut disse hver for seg:

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^4 \left(\frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{3}{2}\right) dx\right| &= \left|\left[\frac{1}{24}(x-2)^3 - \frac{3}{2}x\right]_0^4\right| \\
&= \left|\left(\frac{1}{24}(4-2)^3 - \frac{3}{2}\cdot 4\right) - \left(\frac{1}{24}(0-2)^3 - \frac{3}{2}\cdot 0\right)\right| \\
&= \left|\left(\frac{8}{24} - \frac{3}{2}\cdot 4\right) - \left(-\frac{8}{24}\right)\right| = \left|\frac{16}{24} - 6\right| \\
&= \left|-\frac{16}{3}\right| = \frac{16}{3} \qquad (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_4^{10} \left(\frac{1}{9}(x-7)^2 - 2\right) dx\right| &= \left|\left[\frac{1}{27}(x-7)^3 - 2x\right]_4^{10}\right| \\
&= \left|\left(\frac{1}{27}(10-7)^3 - 2\cdot 10\right) - \left(\frac{1}{27}(4-7)^3 - 2\cdot 4\right)\right| \\
&= |(1-20) - (-1-8)| = |-19+9| \\
&= |-10| = 10 \qquad (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_{10}^{18} \left(\frac{1}{8}(x-14)^2 - 3\right) dx\right| &= \left|\left[\frac{1}{24}(x-14)^3 - 3x\right]_{10}^{18}\right| \\
&= \left|\left(\frac{1}{24}(18-14)^3 - 3\cdot 18\right) - \left(\frac{1}{24}(10-14)^3 - 3\cdot 10\right)\right| \\
&= \left|\left(\frac{8}{3} - 54\right) - \left(-\frac{8}{3} - 30\right)\right| = \left|-\frac{154}{3} + \frac{98}{3}\right| \\
&= \left|-\frac{56}{3}\right| = \frac{56}{3} \qquad (5)
\end{aligned}$$

Vi finner dermed:

$$A = \frac{16}{3} + 10 + \frac{56}{3} = \frac{16+30+56}{3} = \frac{102}{3} = 34$$

Volumet blir derfor

$$V = A\cdot 9 = 34\cdot 9 = 306$$

Altså volumet av bassenget til Gert er 306 m^3.

Oppgave 2

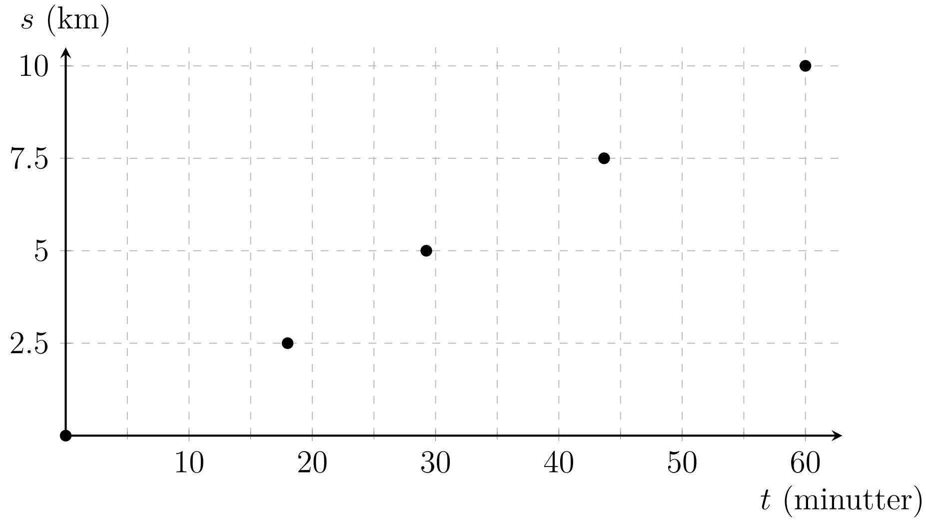
Hege går i 10. trinn på Illsvik ungdomsskole. Hvert år skal 10.klassingene ved skolen løpe Illsvikmila (10 km lang løype i kupert terreng). Langs traséen er det plassert kontrollposter som registrerer tiden til deltakerene når de passerer. Disse er plassert etter 2,5, 5 og 7,5 km. Tiden til Hege i mål var nøyaktig 1 time, og under ser du tidene som ble registret ved kontrollpostene:

Post	Tid
2,5 km	18 minutter
5 km	29 minutter og 15 sekunder
7,5 km	43 minutter og 40 sekunder

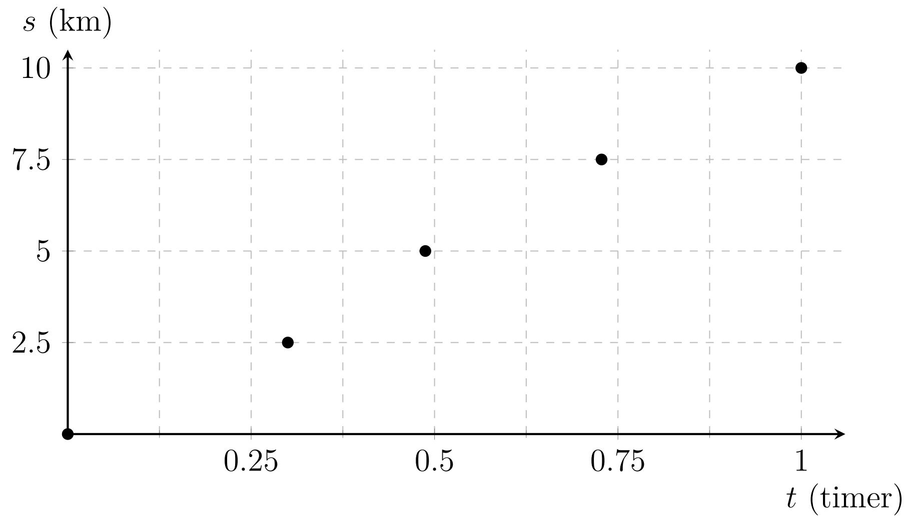
a) Benytt informasjonen som er gitt til å lage en graf der du plotter inn punktmålingene gjort gjennom løpet.

Retteveiledning

Her er det flere måte å representere dataene grafisk. En mulig måte er å bruke tidsenheten minutter langs den horisontale aksen, dvs plotte inn punktene $(18, 2{,}5)$, $(29{,}25, 5)$, $(43{,}67, 7{,}5)$ og $(60, 10)$. Man får da noe slikt



Eller så kan man endre enheten til timer og må da plotte inn punktene $\left(\frac{18}{60}, 2{,}5\right)$, $\left(\frac{29{,}25}{60}, 5\right)$, $\left(\frac{43{,}67}{60}, 7{,}5\right)$ og $(1, 10)$. Da får man følgende graf:



b) Jorunn, lillesøsteren til Hege, foreslår at funksjonen $f(t) = \frac{10}{1}t$ beskriver løpet til Hege (der t er gitt i timer). Kommenter Jorunns forslag.

Retteveiledning

Forslaget til Jorunn forutsetter at Hege holdt konstant fart gjennom heleløpet, nemlig ${}^{10\,km}/_{1\,t} = 10\,km/t$. Dette rimer dårlig med tidene registret underveis i løpet til Hege. For eksempel skulle dette bety at Hege løp de første 2,5 km på 15 minutter ($10t = 2{,}5 \iff t = 0{,}25$).

Hege brukte en pulsklokke med GPS under løpet som ga henne følgende funksjon for tilbakelagt strekning:

$$s(t) = 6t + 12t^2 - 8t^3, \qquad 0 \le t \le 1 \qquad \text{(der } t \text{ er gitt i timer).}$$

Grafen til denne er vist i vedlegg 2.

c) Hege sier at hun holdt en større fart i mål enn ved starten av løpet. Kommenter Heges påstand.

Retteveiledning

Her kan man enten bruke dataene fra pulsklokken eller sammenlikne tiden Hege løp de første og siste 2,5 km av løpet. Merk at sistnevnte alternativet ikke gir et godt nok svar på spørsmålet alene.

Bruker en dataene fra pulsklokken til Hege kan en finne hastighetsfunksjonen ved tiden t ved å derivere $s(t)$.

$$v(t) = s'(t) = 6 + 24t - 24t^2.$$

Vi blir da bedt om å sammenlikne $v(0)$ med $v(1)$. Begge disse evalueres til 6 og vi kan da si at Hege hadde lik fart i starten av løpet og i mål.

d) Ut fra dataene fra pulsklokken, hva var toppfarten til Hege og når ble den nådd?

Retteveiledning

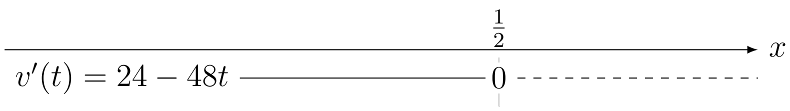
Vi tar utgangspunkt i at tilbakelagt strekning er gitt ved $s(t) = 6t + 12t^2 - 8t^3$. Ved å derivere $s(t)$ finner vi funksjonen som angir hastigheten til Hege ved tiden t:

$$v(t) = s'(t) = 6 + 24t - 24t^2.$$

Vi må nå finne maksimumsverdien(e) til $v(t)$. Mulige kandidater for dette er blant de kritiske punktene til $v(t)$, dvs løsningene av $v'(t) = 0$. Merk at dette kan oppfattes som når er akselerasjonen til Hege null, da $v'(t) = a(t)$ er funksjonen som angir akselerasjonen.

$$v'(t) = 24 - 48t = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 48t = 24 \quad \Longleftrightarrow \quad t = \frac{1}{2}.$$

For å avgjøre hva slags type kritisk punkt dette er kan man se på fortegnskjema for $v'(t)$:



Figur 1: Fortegnskjema for $v'(t)$.

Vi kan dermed se av fortegnskjemaet at $t = \frac{1}{2}$ gir et maksimumspunkt da $v(t)$ er voksende for $t < \frac{1}{2}$ og avtagende for $t > \frac{1}{2}$. Vi finner topphastigheten ved å evaluere $v(t)$ i $t = \frac{1}{2}$:

$$v\left(\frac{1}{2}\right) = 6 + 24 \cdot \frac{1}{2} - 24\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 + 12 - 6 = 12.$$

Dvs. at toppfarten til Hege var $12\,km/t$ og den ble nådd ved tiden $t = \frac{1}{2}$ timer.

Oppgave 3

En bedrift har 80 kunder hvorav sju er misfornøyde med leveransene. Hvis bedriftsledelsen besøker et tilfeldig utvalg av tolv kunder,

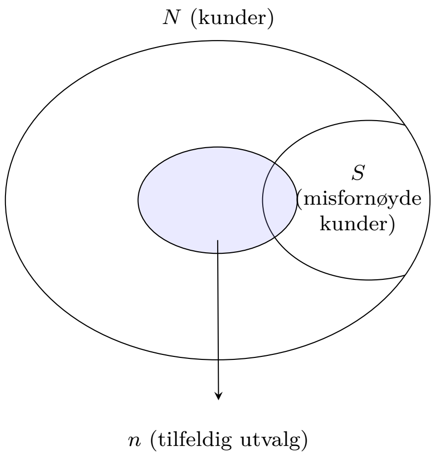
a) Hvor sannsynlig er det at nøyaktig en av de tolv kundene er misfornøyd?

Retteveiledning

Vi skal her trekke et tilfeldig utvalg (uten tilbakeleggin) fra mengden av kunder. Disse er enten fornøyde eller misfornøyde. La X være antallet misfornøyde kunder, da vil vi kunne modeller situasjonen ved en hypergeometrisk sannsynlighetsfordeling. Den er gitt som

$$P(X = x) = \frac{\binom{S}{x}\binom{N-S}{n-x}}{\binom{N}{n}},$$

der $N = 80$ er totalt antall kunder, $S = 7$ antallet misfornøyde kunder og $N - S = 80 - 7 = 73$ er antallet kunder som er ikke misfornøyde (fornøyde!). Vi trekker så et tilfeldig utvalg av $n = 12$ kunder (uten tilbakelegging).



Vi finner da sannsynligheten for at nøyaktig en kunde er misfornøyd blant de tolv tilfeldig valgte kundene:

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \frac{\binom{7}{1}\binom{80-7}{12-1}}{\binom{80}{12}} \\ &= \frac{\binom{7}{1}\binom{73}{11}}{\binom{80}{12}} \\ &= \frac{7 \cdot 3\,558\,497\,368\,608}{60\,246\,643\,120\,300} = 0{,}413 \end{aligned} \tag{6}$$

b) Hvor sannsynlig er det at mer enn to kunder er misfornøyde?

Retteveiledning

Vi blir her bedt om å finne $P(X > 2)$. Dette kan gjøres på flere måter, enten finner man ut hva

$$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) + \cdots P(X = 7) = \sum_{i=3}^{7} P(X = i).$$

Eller så kan en benytte komplementær setningen:

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(\overline{X > 2}) \\ &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) \end{aligned}$$

Sannsynligheten for at ingen av kundene i utvalget er misfornøyde ($x = 0$) er:

$$P(X=0) = \frac{\binom{7}{0}\binom{73}{12}}{\binom{80}{12}} = \frac{1 \cdot 18\,385\,569\,737\,808}{60\,246\,643\,120\,300} = 0{,}305 \tag{7}$$

Sannsynligheten for at nøyaktig to av kundene i utvalget er misfornøyde ($x = 2$) er:

$$P(X=2) = \frac{\binom{7}{2}\binom{73}{10}}{\binom{80}{12}} = \frac{21 \cdot 621\,324\,937\,376}{60\,246\,643\,120\,300} = 0{,}217 \tag{8}$$

Summerer vi likningene (6) til (8) finner vi:

$$P(X \leq 2) = 0{,}305 + 0{,}217 + 0{,}413 = 0{,}935$$

Derfor blir sannsynligheten for at flere enn to kunder er misfornøyde:

$$P(X > 2) = 1 - 0{,}935 = 0{,}065.$$

Kari og Linus sitter og jobber med oppgavene over og følgende dialog finner sted:

KARI: Jeg mener at her må man bruke en hypergeometriske sannsynlighetsfordeling.

LINUS: Jeg er ikke enig. Jeg syns at det er mer korrekt å bruke en binomisk sannsynlighetsfordeling da det er snakk om to typer kunder som enten er førnøyde eller misfornøyde. Dessuten er det ikke med tilbakelegging.

c) Kommenter dialogen over og gjør rede for hvilken av de to modellene som passer best i den gitte situasjonen.

Retteveiledning

Kari vurderer situasjonen riktig da hun mener at man skal modellere situasjonen hypergeometrisk. Linus forveksler nok her den binomiske sannsynlighetsfordelingen med den hypergeometriske sannsynlighetsfordelingen. Han sier korrekt at situasjonen er uten tilbakelegging. En av forutsettningene for en binomisk situasjon er at delforsøkene er uavhengige av hverandre, dette er umulig oppfylt når en har uten tilbakelegging. Fordi sannsynligheten for at neste kunde en velger fra utvalget er misfornøyd er avhengig av om forrige kunde var misfornøyd eller ikke. I tillegg vil sannsynligheten for at en kunde er misfornøyd i et delforsøk være avhengig av hvor mange som er blitt trukket fram til da.

Marthe selger egg på bondens marked og garanterer at alle hennes kartonger med 12 egg inneholder høyst ett dårlig egg. Hvis en kartong inneholder mer enn ett dårlig egg, vil hun erstatte hele dusinet og la kunden beholde de gode eggene! Marthe antar at sannsynligheten for at et egg er dårlig er 0,05.

d) Hva er sannsynligheten for at Marthe må erstatte en gitt kartong?

Retteveiledning

Dette kan ses på som en binomisk situasjon:

- Et forsøk består i om et egg er godt eller dårlig,
- sannsynligheten for at et egg er dårlig er lik i alle forsøkene,

- Forsøkene er uavhengige av hverandre.

Dersom X er antall dårlige egg i en kartong, $p = 0{,}05$ er sannsynligheten for at et egg er dårlig og det er $n = 12$ egg i en kartong vil sannsynligheten for at det er nøyaktig x egg er dårlig være gitt som:

$$P(X = x) = \binom{12}{x} p^x (1-p)^{12-x}.$$

Vi må finne sannsynligheten for at to eller flere egg er dårlige i en kartong:

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + \cdots + P(X = 12)$$

Om en bruker komplementær setningen får man følgende:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(\overline{X \geq 2}) \\ &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \end{aligned} \tag{9}$$

Vi finner så sannsynligheten for at ingen egg er dårlige og nøyaktig ett egg er dårlig:

$$P(X = 0) = \binom{12}{0} p^0 (1-p)^{12} = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}95^{12} \approx 0{,}5404 \tag{10}$$

$$P(X = 1) = \binom{12}{1} p^1 (1-p)^{12-1} = 12 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95^{11} \approx 0{,}3413 \tag{11}$$

Vi kan så sette inn likningene (10) og (11) i likning (9) og vi får da:

$$P(X \geq 2) \approx 1 - (0{,}5404 + 0{,}3413) = 0{,}1183.$$

Altså er sannsynligheten for at Marthe må erstatte en kartong om lag 11,83%.

Oppgave 4

Nils får være med sin bestefar på Vestfjorden, midt mellom Henningsvær og Hamarøy, for å fiske torsk. Vekten V av dagens fangst antas å være normalfordelt med forventningsverdi μ kg og standardavvik σ kg.

a) Anta at forventningsverdien $\mu = 84$ kg og standardavviket er $\sigma = 21$ kg. Hva er sannsynligheten for at fangsten blir mellom 100 og 115 kg?

Retteveiledning

Vi får opplyst at variabelen V (vekten av fangsten) er normalfordelt $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ og vi kan derfor transformere den til en standardnormalfordelt variable Z ved følgende likning:

$$Z = \frac{V - \mu}{\sigma} = \mathcal{N}(0, 1).$$

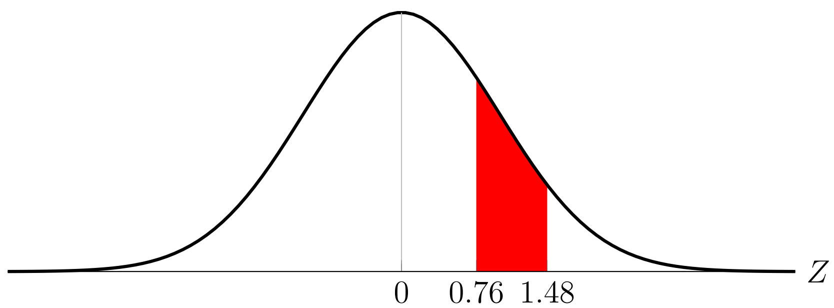
Vi blir bedt om å finne $P(100 < V < 115)$:

$$\begin{aligned} P(100 < V < 115) &= P\left(\frac{100 - 84}{21} < \frac{V - \mu}{\sigma} < \frac{115 - 84}{21}\right) \\ &= P\left(\frac{16}{21} < Z < \frac{31}{21}\right) \\ &= P\left(0{,}76 < Z < 1{,}48\right) \\ &= P\left(Z < 1{,}48\right) - P\left(Z < 0{,}76\right) \end{aligned}$$

Vi kan da bruke vedlegg 4 til å lese ave sannsynlighetene for $P(Z)$ direkte:

$$\begin{aligned} P(100 < V < 115) &= P\left(Z < 1{,}48\right) - P\left(Z < 0{,}76\right) \\ &= 0{,}9306 - 0{,}7764 = 0{,}1542 \\ &= 0{,}1542 \end{aligned}$$

Det vil si at det er 15,4% sannsynlighet for at dagens fangst er mellom 100 og 115 kg.



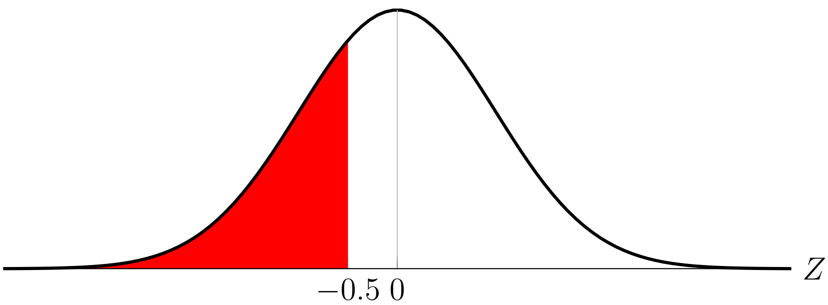
b) Anta nå at forventningsverdien er $\mu = 200$ kg og standardavviket er $\sigma = 40$ kg. Bestemoren til Nils blir skuffet hvis han kommer hjem med mindre enn 180 kg torsk. Hvor sannsynlig er det at hun blir skuffet?

Retteveiledning

Vi skal her finne sannsynligheten for at Nils kommer hjem med en fangst mindre enn 180 kg, dvs $P(V < 180)$. Igjen er V (vekten av fangsten) normalfordelt $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ der forventningsverdien $\mu = 200$ kg og standardavviket er $\sigma = 40$ kg.

$$
\begin{aligned}
P(V < 180) &= P\left(\frac{V-\mu}{\sigma} < \frac{180-200}{40}\right) \\
&= P\left(Z < \frac{-20}{40}\right) \\
&= P\left(Z < -0{,}5\right) \\
&= 1 - P\left(Z < 0{,}5\right) \\
&= 1 - 0{,}6915 \\
&= 0{,}3085
\end{aligned}
$$

Det vil si at sannsynligheten for at bestemoren til Nils blir skuffet er 30,85%.



For en standard språktest for ungdomsskoleelever er gjennomsnittsresultatet for hele landet $\mu = 125$ og $\sigma = 16{,}4$. Skoleledelsen i en bestemt by mener imidlertid at elevene i denne byens skoler er bedre enn landsgjennomsnittet. Det tas så et utvalg på $n = 86$ elever fra ungdomsskolene i denne byen. Disse skolene blir vår nye populasjon. Vi lar μ betegne gjennomsnittlig score i denne populasjonen.

Dette leder til testingssituasjonen $H_0 : \mu = 125$ mot $H_1 : \mu > 125$, der $\sigma = 16{,}4$ antas kjent og utvalget består av de $n = 86$ elevene. Resultatet blir et gjennomsnitt $\bar{X} = 128{,}5$ for de 86 elevene.

c) Utfør hypotesetesten ved 5% signifikansnivå, og formuler konklusjonen av testen med ord.

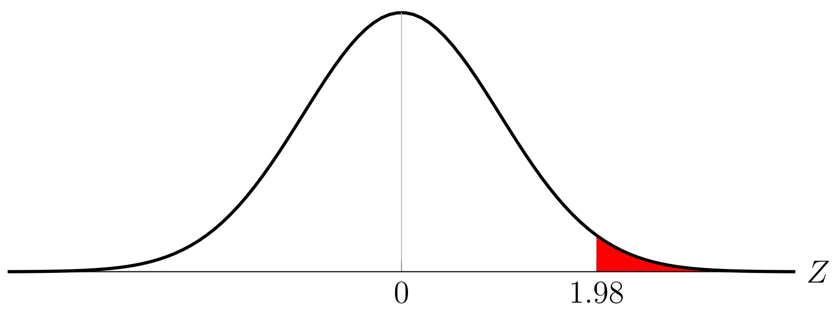
Retteveiledning

Vi bruker testobservastoren $\bar{X}$, som er tilnærmet normaltfordelt $\mathcal{N}(125, 16{,}4)$. Vi kan transformere $\bar{X}$ til en standardnormalfordelt variabel ved følgende formel:

$$Z = \frac{\bar{X} - 125}{\sigma/\sqrt{86}}$$

Dette betyr at vi nå må forkaste H_0 hvis den beregnede verdien for Z er så stor at den ikke med en rimelig margin kan komme fra en standardnormalfordelt variabel. Vi får opplyst at gjennomsnittscoren for de 86 eleven er $\bar{X} = 128{,}5$ og vi får da

$$\begin{aligned} Z &= \frac{128{,}5 - 125}{16{,}4/\sqrt{86}} \\ &\approx 1.98 \end{aligned}$$



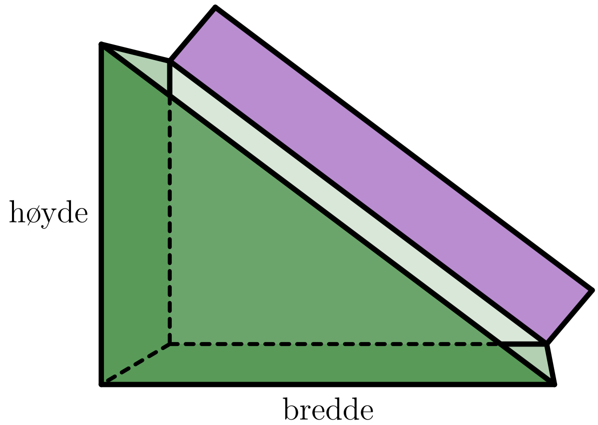
Vi må nå finne sannsynligheten for at man ved en tilfeldighet har plukket ut et utvalg som scorer 1,96 ganger bedre enn landsgjennomsnittet:

$$\begin{aligned} P(Z > 1{,}98) &= 1 - P(\overline{Z > 1{,}98}) \\ &= 1 - P(Z \leq 1{,}98) \\ &= 1 - 0{,}9761 \\ &= 0{,}0239 \end{aligned}$$

Dvs $P(Z > 1{,}98)$ er 2,39%. Da dette er mindre enn signifikansnivået $\alpha = 0{,}05$, forkaster vi H_0.

Vi konkluderer dermed med at det er tilstrekkelig grunnlag (med signifikansnivå 0,05 eller 5%) til å si at elevene ved denne byens ungdomsskoler scorer bedre enn landsgjennomsnittet på språktesten.

Oppgave 5
Skolebedriften Origami ønsker å lage en gaveeske i papir formet som en trekantet prisme. Av estetiske årsaker ønsker de at trekanten skal være en rettvinklet trekant slik at bredde : høyde $= 4 : 3$ (se figur 2).



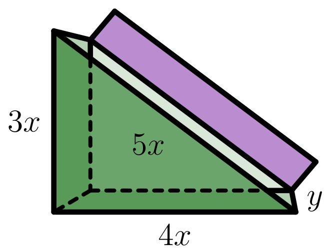
Figur 2: Gaveesken (grønn) med lokk (lilla).

Materialet som benyttes til esken uten lokk koster 1 kr/cm^2 mens materialet til lokket koster $\frac{1}{5}$ kr/cm^2 (farget henholdsvis som grønn og lilla i figur 2). I tillegg er det bestemt at volumet til esken skal være 18000 cm^3.

Bestem størrelsen på esken som minimerer materialkostnadene.

Retteveiledning

Siden forholdet mellom bredde og høyde er satt til $4 : 3$ ser vi at den rettvinklete siden av esken blir et pytagoreisk trippel av formen $(3x, 4x, 5x)$. La så y være eskens dybde (se figur 3).



Figur 3

La K være materialkostnadene for gaveesken. Vi finner da at K er gitt som:

$$K = (2 \cdot A_{trekant} + A_{bunn} + A_{bakside}) \cdot 1 + A_{lokk} \cdot \frac{1}{5},$$

der $A_{trekant}, A_{bunn}, A_{bakside}$ og A_{lokk} er henholdsvis overflaten til trekantede siden, rektangulære bunnen, rektangulære baksiden og rektangulære lokket. Disse er da gitt av følgende uttrykk:

$$\begin{aligned} A_{trekant} &= \frac{1}{2} \cdot 4x \cdot 3x = 6x^2 \\ A_{bunn} &= 4x \cdot y = 4xy \\ A_{bakside} &= 3x \cdot y = 3xy \\ A_{lokk} &= 5x \cdot y = 5xy \end{aligned}$$

Dette gir at $K = K(x, y)$ kan uttrykkes som:

$$\begin{aligned} K(x, y) &= (2 \cdot 6x^2 + 4xy + 3xy) \cdot 1 + 5xy \cdot \frac{1}{5} \\ &= 12x^2 + 8xy. \end{aligned} \tag{12}$$

Produsenten ønsker videre at volumet til esken skal være nøyaktig 18000 cm^3 hvilket betyr at

$$V = 18000 \quad \Longleftrightarrow \quad 6x^2 y = 18000 \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{18000}{6x^2} = \frac{3000}{x^2}. \tag{13}$$

Ved å substituere (13) inn i (12) får vi:

$$K(x) = 12x^2 + \frac{24000}{x}.$$

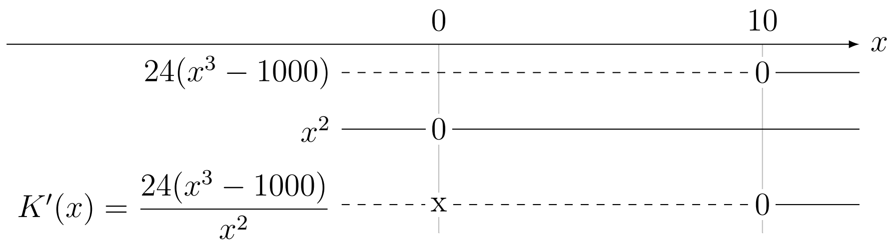
Vi finer så de kritiske punktene til $K(x)$ (dvs. $K'(x) = 0$).

$$K'(x) = 24x - \frac{24000}{x^2} = \frac{24(x^3 - 1000)}{x^2}. \tag{14}$$

Vi setter så (14) lik null og løser:

$$
\begin{aligned}
K'(x) = 0 \quad &\iff \quad \frac{24(x^3 - 1000)}{x^2} = 0 \\
&\iff \quad 24(x^3 - 1000) = 0 \\
&\iff \quad x^3 - 1000 = 0 \\
&\iff \quad x^3 = 1000 \\
&\iff \quad x = 10.
\end{aligned}
$$

Av fortegnskjemat til $K'(x)$ (vist i figur 4) kan en se at at $K(x)$ har et minimumspunkt når $x = 10$.



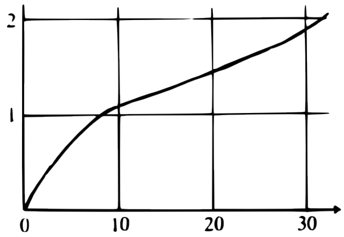
Figur 4: Fortegnskjema for $K'(x)$.

Vi finner bredden og høyden til gaveesken som minimerer materialkostnadene ved å sette inn for $x = 10$ i $(3x, 4x)$, mens dybden finner vi ved å sette inn $x = 10$ i (13):

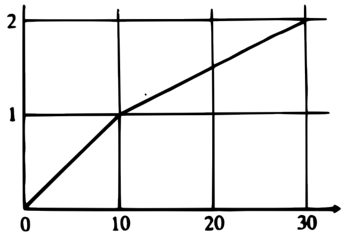
$$
\begin{aligned}
\text{Bredde} &= 4 \cdot 10 = 40 \\
\text{Høyde} &= 3 \cdot 10 = 30 \\
\text{Dybde} &= \frac{3000}{10^2} = 30.
\end{aligned}
$$

Vedlegg 1

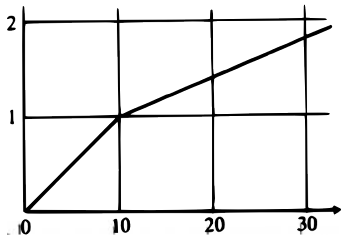
Aslak



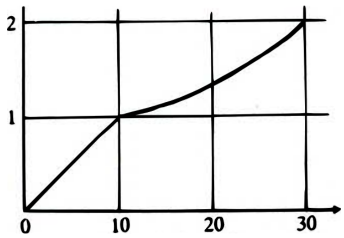
Bente



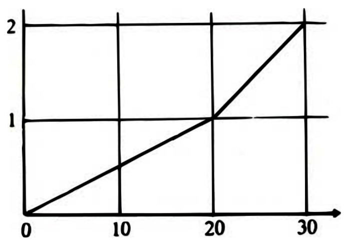
Christoffer



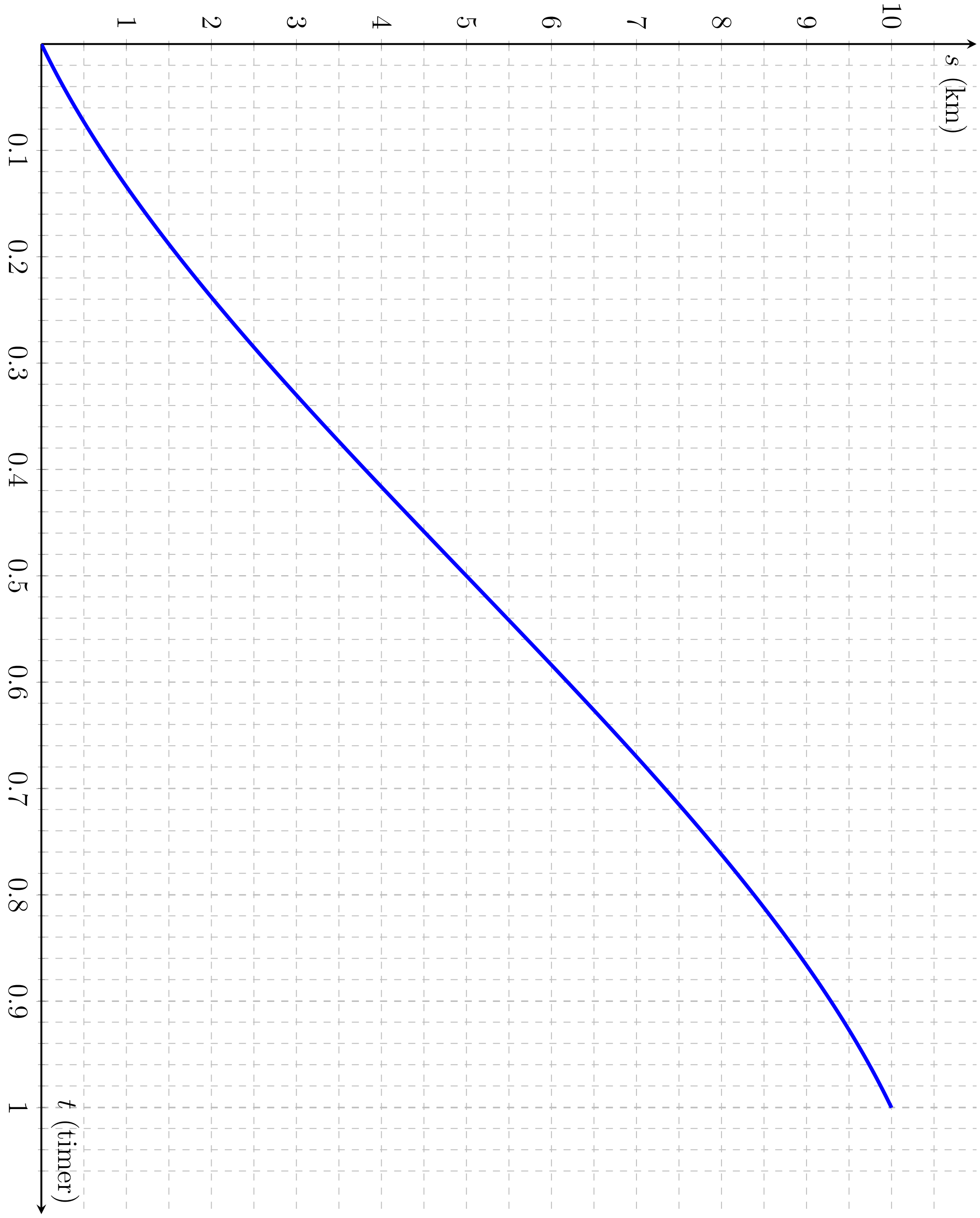
Dina



Edgard



Vedlegg 2



Vedlegg 3
Formelark for sannsynlighetsregning og statistikk

Binomialkooeffisient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Addisjonssetningen

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Definisjon av betinget sannsynlighet

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Bayes formel

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid \overline{A})P(\overline{A})}$$

Forventning, varians og standardavvik for en stokastisk variabel X

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \sum_{\text{alle } x_i} x_i \cdot P(X = x_i)$$
$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \sum_{\text{alle } x_i} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$
$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Hypergeometrisk fordeling

$$P(X = x) = \frac{\binom{S}{x}\binom{N-S}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \qquad \mathrm{E}(X) = np, \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$$

der $p = {}^{S}/_{N}$.

Binomisk fordeling

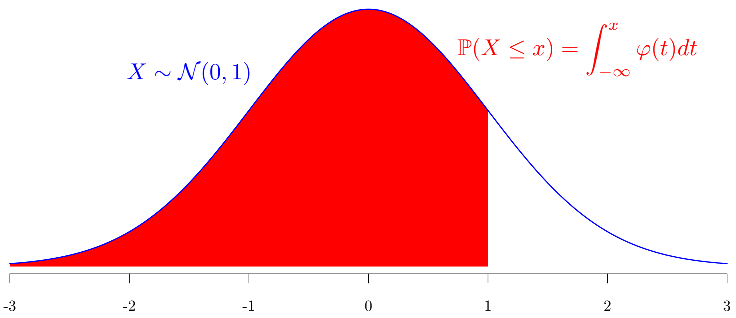
$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad \mathrm{E}(X) = np, \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

Dersom X er normalfordelt med forventning μ og varians σ^2, og

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

så er Z normalfordelt med forventning 0 og varians 1.

Vedlegg 4
Standard normalfordeling



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990